

Soyut Matematiğe Giriş

Matematiksel İspatı Anlamak

PROF. DR. SAVAŞ BAŞTÜRK

EĞİTİM
yayınevi

SOYUT MATEMATİĞE GİRİŞ
MATEMATİKSEL İSPATI ANLAMAK

Editör: Prof. Dr. Savaş Baştürk

Yayınevi Grubu Genel Başkanı: Yusuf Ziya Aydođan (yza@egitimyayinevi.com)

Genel Yayın Yönetmeni: Yusuf Yavuz (yusufyavuz@egitimyayinevi.com)

Sayfa Tasarımı: Kübra Konca Nam

Kapak Tasarımı: Eğitim Yayınevi Grafik Birimi

T.C. Kültür ve Turizm Bakanlığı

Yayıncı Sertifika No: 76780

ISBN: 978-625-385-178-1

1. Baskı, Mayıs 2025

Baskı Cilt: Vadi Grafik Tasarım ve Reklamcılık Ltd. Şti.
İvedik Org. San.1420. Cad. No: 58/1 Yenimahalle/ANKARA
Matbaa Sertifika No: 47479

Kütüphane Kimlik Kartı

SOYUT MATEMATİĞE GİRİŞ
MATEMATİKSEL İSPATI ANLAMAK

Editör: Prof. Dr. Savaş Baştürk

263 s., 160x240 mm

Kaynakça var, izin yok.

ISBN: 978-625-385-178-1

Copyright © Bu kitabın Türkiye'deki her türlü yayın hakkı Eğitim Yayınevi'ne aittir. Bütün hakları saklıdır. Kitabın tamamı veya bir kısmı 5846 sayılı yasanın hükümlerine göre kitabı yayımlayan firmanın ve yazarlarının önceden izni olmadan elektronik/mechanik yolla, fotokopi yoluyla ya da herhangi bir kayıt sistemi ile çoğaltılamaz, yayımlanamaz.

EĞİTİM
yayınevi

Yayınevi Türkiye Ofis: İstanbul: Eğitim Yayınevi Tic. Ltd. Şti., Atakent mah.
Yasemen sok. No: 4/B, Ümraniye, İstanbul, Türkiye

Konya: Eğitim Yayınevi Tic. Ltd. Şti., Fevzi Çakmak Mah. 10721 Sok. B Blok,
No: 16/B, Safakent, Karatay, Konya, Türkiye
+90 332 351 92 85, +90 533 151 50 42
bilgi@egitimyayinevi.com

Yayınevi Amerika Ofis: New York: Egitim Publishing Group, Inc.
P.O. Box 768/Armonk, New York, 10504-0768, United States of America
americaoffice@egitimyayinevi.com

Lojistik ve Sevkiyat Merkezi: Kitapmatik Lojistik ve Sevkiyat Merkezi, Fevzi Çakmak Mah.
10721 Sok. B Blok, No: 16/B, Safakent, Karatay, Konya, Türkiye
sevkiyat@egitimyayinevi.com

Kitabevi Şubesi: Eğitim Kitabevi, Şükran mah. Rampalı 121, Meram, Konya, Türkiye
+90 332 499 90 00
bilgi@egitimkitabevi.com

İnternet Satış: www.kitapmatik.com.tr
bilgi@kitapmatik.com.tr

EĞİTİM YAYINEVİ
GRUBU

EĞİTİM
yayınevi

SALON
yayınevi

Kitapmatik®
yayınevi

kitapmatik
matematik kitapları

EĞİTİM
KITABEVİ

Bu kitabı, sevgili eşim Ebru'ya, canım çocuklarım Ahmet ve Sare'ye, kıymetli anneme ve babama ithaf ediyorum.

Savaş BAŞTÜRK

Önsöz

Matematik, doğanın dilidir ve insan zihninin en saf ifade biçimlerinden biridir. Soyut matematik, bu dilin en rafine hâli olup, matematiğin temel yapısını anlamamızı sağlar. Ancak, soyut matematiğe giriş yapmak, birçok öğrenci için zorlayıcı olabilir. Bu kitap, matematiğin temel yapı taşlarını kavramak isteyen öğrenciler için bir kılavuz niteliğinde hazırlanmıştır. Matematik yalnızca hesaplamalar ve algoritmalar bütünü değildir; aksine, düşünme biçimi, akıl yürütme sanatı ve ispatlarla kurulan bir mantık sistemidir.

Öğrencilerin karşılaştığı en büyük zorluklardan biri, matematiğin nasıl düşünüldüğünü ve yazıldığını anlamaktır. İlk bakışta, soyut matematik ve ispat yöntemleri karmaşık görünebilir. Ancak, belirli yöntemleri ve düşünce kalıplarını öğrenerek, bu zorlukların üstesinden gelmek mümkündür. Bu kitap, matematiksel ispatları anlamayı ve uygulamayı kolaylaştırmak amacıyla hazırlanmıştır. Okuyuculara, soyut matematiğin temel kavramlarını tanıtırken, aynı zamanda ispat yapma yetilerini geliştirecek çeşitli teknikler sunmaktadır.

Matematiğin Dili ve Yapısı

Matematik, kendine özgü bir dile sahiptir. Matematiksel ifadeler yalnızca sayıların ve sembollerin bir araya gelmesiyle oluşmaz; aynı zamanda belirli mantıksal kurallar çerçevesinde düzenlenmiş bir sistemdir. Bu nedenle, soyut matematiğin temelini anlamak için öncelikle bu dilin kurallarını öğrenmek gerekir. Kitabın ilk bölümleri, mantık, kümeler ve fonksiyonlar gibi temel konulara ayrılmıştır.

Mantık, matematiğin temel taşıdır. Doğru düşünmeyi, akıl yürütmeyi ve sağlam argümanlar oluşturmayı öğretir. Önermeler, koşullu ifadeler ve niceleyiciler gibi kavramları anlamadan, daha ileri matematiksel konulara geçmek zordur. Küme teorisi ise, matematiksel nesnelerin nasıl organize edildiğini ve birbirleriyle nasıl ilişkilendirildiğini açıklar. Fonksiyonlar ise, matematiğin birçok alanında kullanılan en temel yapılar arasında yer alır.

Bu kitabın ilerleyen bölümleri, ispat tekniklerine odaklanmaktadır. Doğrudan ispat, çelişki yöntemi, karşıt ters yöntemiyle ispat ve matematiksel tümevarım gibi temel ispat yöntemleri detaylandırılmış ve çeşitli örneklerle desteklenmiştir. Ayrıca, öğrencilerin karşılaşabileceği yaygın hatalara dikkat çekilerek, sağlam ispatlar yazabilmeleri için pratik öneriler sunulmuştur.

Matematiksel İspatın Önemi

Matematik yalnızca sonuçlarla değil, aynı zamanda bu sonuçlara nasıl ulaşıldığıyla da ilgilenir. İspatlar, matematiğin güvenilirliğini sağlayan temel araçlardır. Bir önermenin doğru olup olmadığını belirlemek için ispat yapmamız gerekir. İspatlar, aynı zamanda matematiksel düşünceyi geliştiren bir egzersizdir. Bir problemi çözmek için hangi yaklaşımın uygun olduğunu seçmek, alternatif yolları değerlendirmek ve kesin sonuçlara ulaşmak, matematikçilerin ve öğrencilerin sahip olması gereken temel becerilerdir.

Bu kitap, öğrencilere yalnızca formülleri ezberletmeyi amaçlamaz; aksine, matematiksel düşünme becerilerini geliştirmeye yönelik bir yol haritası sunar. Çok yaygın olarak kullanılan bir benzetmeye göre, matematik öğrenmek, satranç oynamayı öğrenmeye benzer: Önce taşların nasıl hareket ettiğini öğreniriz, ardından strateji geliştirmeye başlarız. Matematikte de önce temel kuralları öğrenmek, ardından bu kurallar çerçevesinde yaratıcı düşünme becerisini geliştirmek gerekir.

Öğrencilere önerim, bu kitabı yalnızca okuyarak değil, aynı zamanda aktif bir şekilde çalışarak kullanmalarıdır. Matematik ancak bol pratik yaparak ve yazarak öğrenilebilir. Bu nedenle, kitap boyunca yer alan alıştırmaların çözülmesi, kitapta önerilen

ispatı incelemeden önce kendi ispatının yazılmaya çalışılması ve bunların akranlarla birlikte tartışılarak yapılması, öğrenme sürecini geliştirecek ve hızlandıracaktır.

Bu Kitabın Amacı ve Kullanımı

Bu kitabın, üniversitelerde okutulan matematik dersleri ve özellikle soyut matematik dersleri için önemli bir katkı sağlayacağını düşünüyorum. Her ne kadar, matematik bölümlerinde okuyan öğrenciler ve matematik öğretmeni adayları kitabın hedef kitesini oluşturuyorsa da matematiksel ispata ve soyut matematiğe ilgi duyan herkes bu kitaptan faydalanabilir.

Bilimsel ve pedagojik bir yaklaşımla ele alınan kitap, hem ders kitabı olarak hem de bireysel çalışma kaynağı olarak kullanılabilir. Konular, öğrencilerin matematiksel düşünce yapılarını geliştirmelerine yardımcı olacak şekilde düzenlenmiştir. Bölümler arasında doğal bir geçiş sağlanmış olup, her bölüm önceki konulara dayalı olarak ilerlemektedir. Böylece, öğrencilerin konuları adım adım kavramaları hedeflenmiştir. Ayrıca kitapta, ispatın öğrenilmesi ve öğretilmesinde çok önemli bir yeri olan "ispat şemaları" kavramı örnekleriyle birlikte ele alınmıştır. Bu şekilde, okuyucunun hem kendisinin hem de, eğer öğretmenlik mesleğini yapıyor ya da yapacaksa, öğrencilerinin ispat şemalarının farkında olması sağlanmaya çalışılmıştır. Ayrıca, şema bilgilerinin öğretmenlerin öğrenci ispatlarına karşı daha hoşgörülü bir anlayış geliştirmelerine yardımcı olacağı düşünülmektedir.

Kitap boyunca okuyucuya rehberlik eden birçok çözülmüş örnek bulunmaktadır. Bu örnekler, öğrencilerin karşılaşılabilecekleri zorlukları daha kolay aşmalarını sağlamak amacıyla özenle seçilmiştir. Ayrıca, her bölüm sonunda verilen alıştırmalar, öğrencilerin bilgilerini pekiştirmelerine yardımcı olacaktır.

Geri Bildirim ve Düzeltmeler

Bu kitabın içeriğini en doğru ve anlaşılır şekilde sunmaya büyük özen gösterdim. Ancak, her akademik çalışmada olduğu gibi, burada da gözden kaçan hatalar veya iyileştirilmesi gereken noktalar olabilir. Okuyucular, karşılaştıkları olası hata, eksiklik

veya önerilerini bana e-posta yoluyla iletirlerse, bunlar sonraki baskılarda dikkate alınacaktır. Geri bildirimleriniz, bu kitabın daha faydalı ve kusursuz bir kaynak haline gelmesine katkı sağlayacaktır. İlginiz ve desteğiniz için şimdiden teşekkür ederim.

Teşekkür

Bu kitabın hazırlanmasında bana destek olan birçok kişi ve kuruma teşekkür etmek istiyorum. Öncelikle, Türkiye Cumhuriyeti Millî Eğitim Bakanlığı'na (MEB), eğitimime sağladıkları burs ve destekleri için teşekkür ederim. Eğitimde fırsat eşitliği yaratma misyonları, benim gibi birçok akademisyenin bilimsel çalışmalar yapmasına olanak sağlamaktadır.

Ayrıca, öğrencilerime teşekkür etmek isterim. Derslerde sordukları sorular, yaptıkları tartışmalar ve ortaya koydukları fikirler, bu kitabın şekillenmesine büyük katkı sağladı. Onların merakı ve öğrenme azmi, bana ilham verdi.

Son olarak, bu kitabın yayımlanmasında emeği geçen yayınevi çalışanlarına teşekkür ederim. Kitabın düzenlenmesi, basılması ve öğrencilere ulaşması sürecinde gösterdikleri özveri ve titizlik, bu çalışmayı hayata geçirmemde büyük rol oynadı. Bu kitabın, soyut matematik dünyasına adım atan tüm öğrencilere faydalı olmasını dilerim. Matematiksel düşünme, yalnızca akademik bir beceri değil, aynı zamanda hayatın her alanında kullanılacak değerli bir yetenektir. Umarım bu kitap, öğrencilerin matematiğe olan ilgisini artırır ve onlara sağlam bir temel kazandırır.

Savaş BAŞTÜRK
sbasturk@sinop.edu.tr, Nisan 2025, Sinop

Yazar Hakkında

Savaş Baştürk, Sinop Üniversitesi Eēitim Fakültesi Matematik ve Fen Bilimleri Eēitimi Bölümü, Matematik Eēitimi Anabilim Dalı'nda ēretim yesi olarak görev yapmaktadır. Lisans eēitimi 1996 yılında Hacettepe Üniversitesi Eēitim Fakültesi Matematik ēretmenliēi bölümünde tamamlamıştır. 2000 yılında Fransa'da Paris 7-Denis Diderot niversitesi'nden Matematik Eēitimi alanında yüksek lisans derecesini almış ve 2003 yılında aynı niversiteden Matematik Eēitimi alanında doktora derecesini elde etmiştir.

Matematik Eēitimi alanındaki araştırmalarına devam eden Baştürk'n ilgi ve çalışma alanları arasında ispat kavramı, özel dersaneler, Pedagojik Alan Bilgisi, matematik eēitiminde teknolojinin entegrasyonu ve ēretmen eēitimi yer almaktadır.

İçindekiler

Önsöz	5
Yazar Hakkında	9
1 Önermeler Cebiri	15
1.1 Önermenin Tanımı	16
1.2 Önerme Olmadığının Anlaşılması Zor Örnekler . .	17
1.3 Önermelerin Gösterimi	18
1.4 Basit (Yalın, Tekil) Önermeler	19
1.5 Bileşik Önermeler	19
1.6 Denk Önermeler	19
1.7 Önermeler Cebiri	19
1.7.1 Bir Önermenin Değili (\neg)	20
1.7.2 Ve İşlemi (\wedge)	20
1.7.3 Veya İşlemi (\vee)	21
1.7.4 Gerektirme (ise) İşlemi (\Rightarrow)	23
1.8 Gerek ve Yeter Koşul	25
1.8.1 Ancak ve Ancak İşlemi (\Leftrightarrow)	28
1.9 Açık Önerme ve Niceleyiciler	31
1.10 Alıştırılmalar	41
2 İspat ve İspat Yöntemleri	45
2.1 Matematiksel İspat Nedir ve Niçin Önemlidir? . . .	45
2.2 İspat Yöntemleri	48
2.2.1 Örnekle İspat (İnşa Yoluyla İspat)	51
2.2.2 Doğruluk Tablosu Yöntemi	53
2.2.3 Doğrudan İspat Yöntemi (direct proof) . . .	53

2.2.4	Karşıt Ters İspat Yöntemi (proof by contra- positive)	56
2.2.5	Çelişki Bulma Yöntemi (proof by contradic- tion)	58
2.2.6	Karşıt (Ters) Örnek Bulma Yöntemi (proof by counterexample)	66
2.2.7	Tümevarımla İspat Yöntemi	71
2.2.8	Duruma Dayalı İspat	76
2.3	Matematiği Yazarken Dikkat Edilmesi Gereken Hu- suslar	79
2.3.1	Açık ve Anlaşılır Olmak	80
2.3.2	Ayrıntıların Derecesini İyi Ayarlamak	81
2.3.3	Dil bilgisi Kurallarına ve Noktalama İşaret- lerine Dikkat Etmek ve Cümlelerle Yazmak	83
2.3.4	Sembollerin Yerli Yerinde Kullanımı	84
2.4	Yaygın Olarak Yapılan İspat Hataları	85
2.5	İspatlar ve Öğretmen Adayları	91
2.6	İspat Şemaları	94
2.6.1	İspat Öğretimi Açısından İspat Şemaları	102
2.7	Alıştırımlar	105
3	Kümeler ve Kümelerde İşlemler	107
3.1	Kümeler	107
3.1.1	Küme Kavramının Tanımı	108
3.1.2	Elemanı Olma ve Eleman Sayısı	109
3.1.3	Sayı Kümeleri	113
3.1.4	Alt Küme Kavramı	114
3.1.5	Eşit Kümeler	116
3.1.6	Evrensel Küme ve Boş Küme	117
3.2	Kümelerde İşlemler	120
3.2.1	Kümelerin Birleşimi	120
3.2.2	Kümelerin Kesişimi	121
3.2.3	Kümelerin Farkı	126
3.2.4	Kuvvet Kümesi	131
3.3	Küme Aileleri	133
3.3.1	Alt Küme Aileleri	137

3.4	Kümelerin Kartezyen Çarpımı	142
3.5	Alıştırmalar	150
4	Bağıntı	155
4.1	Denklik Bağıntısı	162
4.1.1	Denklik Sınıfları	163
4.2	Sıralama Bağıntısı	167
4.3	Alıştırmalar	179
5	Fonksiyon	181
5.1	Fonksiyon Çeşitleri	188
5.1.1	Eşit Fonksiyonlar	188
5.1.2	Birebir Fonksiyon	190
5.1.3	Örten Fonksiyon	194
5.1.4	Birim (Özdeşlik) Fonksiyon	196
5.1.5	Sabit Fonksiyon	197
5.1.6	Ters Görüntü	198
5.1.7	Fonksiyonların Bileşkesi	203
5.1.8	Bir Fonksiyonun Tersisi	206
5.2	Sıra Koruyan Fonksiyonlar	217
5.3	Sonsuz Kümelerin Eleman Sayısı	222
5.4	Sayılabılır ve Sayılamaz Kümeler	224
5.5	Alıştırmalar	233
6	Cebirsel Yapılar	237
6.1	İkili İşlem	237
6.2	Gruplar	242
6.3	Halkalar	246
6.4	Alıştırmalar	250